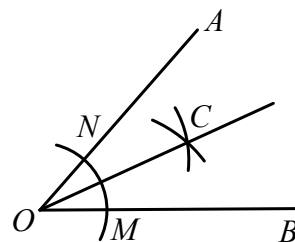


第1讲角平分线的性质与判定(加油站)

一、角平分线的画法

练习1

1. 用直尺和圆规作一个角的平分线的示意图. 如图所示, 则能说明 $\angle AOC = \angle BOC$ 的依据是 () .



A. SSS

B. ASA

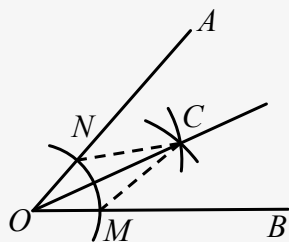
C. AAS

D. 角平分线上的点到角两边距离相等

【答案】 A

【解析】 连接 NC , MC .

在



$\triangle ONC$ 和 $\triangle OMC$ 中,

$$\begin{cases} ON = OM \\ NC = MC, \\ OC = OC \end{cases}$$

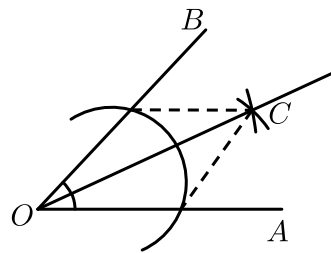
$\therefore \triangle ONC \cong \triangle OMC$ (SSS) .

$\therefore \angle AOC = \angle BOC$.

故选A .

【标注】 【知识点】 作角平分线

用直尺和圆规作一个角的角平分线示意图如图所示，说明 $\angle AOC = \angle BOC$ 的理论依据是全等判定方法中的 _____ 定理．

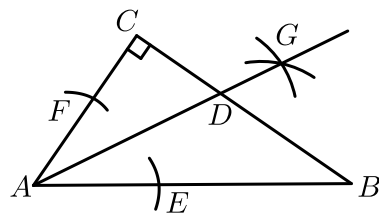


【答案】 SSS

【解析】 由作法知 $AO = BO$ ， $CO = CO$ ， $BC = AC$ ，
 $\therefore \triangle OBC \cong \triangle OAC$ (SSS)，
 $\angle AOC = \angle BOC$ ，
 故填SSS．

【标注】 【知识点】 SSS

3. 如图，在 $\triangle ABC$ ， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle CAB = 50^\circ$ ，按以下步骤作图：①以点 A 为圆心，小于 AC 的长为半径，画弧，分别交 AB ， AC 于点 E 、 F ；②分别以点 E ， F 为圆心，大于 $\frac{1}{2}EF$ 的长为半径画弧，两弧相交于点 G ；③作射线 AG ，交 BC 边与点 D ，则 $\angle ADC$ 的度数为（ ）．



A. 30°

B. 60°

C. 65°

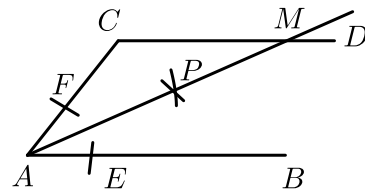
D. 75°

【答案】 C

【解析】 根据作图方法可得 AG 是 $\angle CAB$ 的角平分线，且 $\angle CAB = 50^\circ$ ，
 $\therefore \angle CAD = \angle CAB \div 2 = 25^\circ$ ，
 又 $\because \angle C = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle CDA = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$
 故选C．

【标注】 【知识点】 作角平分线

4. 如图, $AB \parallel CD$, 以点 A 为圆心, 小于 AC 长为半径画弧, 分别交 AB , AC 于 E , F 两点, 再分别以 E , F 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}EF$ 长为半径画弧, 两弧交于点 P , 作射线 AP , 交 CD 于点 M , 若 $\angle C = 150^\circ$, 则 $\angle CMA$ 的大小等于 _____ (度) .



【答案】 15

【解析】 $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ,$$

由题意得, AP 是 $\angle BAC$ 的平分线,

$$\therefore \angle BAM = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \times 30^\circ = 15^\circ,$$

$\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle CMA = \angle BAM = 15^\circ.$$

故答案为: 15 .

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】角分线性性质定理

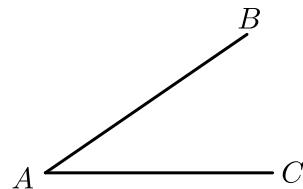
【知识点】平行线的性质

【思想】数形结合思想

|| 练习2

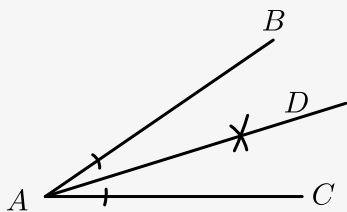
5. 已知: $\angle CAB$.

求作: $\angle CAB$ 的角平分线 AD . (尺规作图, 保留作图痕迹, 不写作法 .)



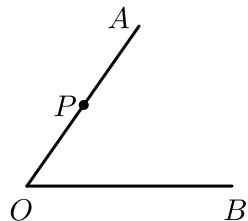
【答案】 画图见解析 .

【解析】 如图 AD 即所求 .



【标注】【知识点】作角平分线

6. 如图，点 P 为 $\angle AOB$ 的边 OA 上一点。



(1) 尺规作图 (要求：保留作图痕迹，不写做法，标明字母)

① 在 $\angle AOB$ 的内部做 $\angle APQ = \angle O$ 。

② 作 $\angle OPQ$ 的角平分线 PM 与 OB 交于点 M 。

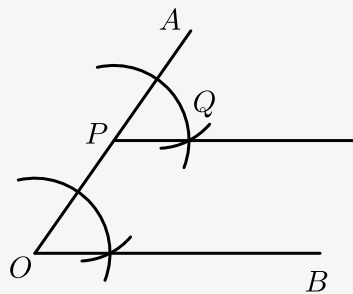
(2) 在(1)中所作的图中，若 $\angle O = 50^\circ$ ，求 $\angle OMP$ 的度数。

【答案】(1) ① 画图见解析。

② 画图见解析。

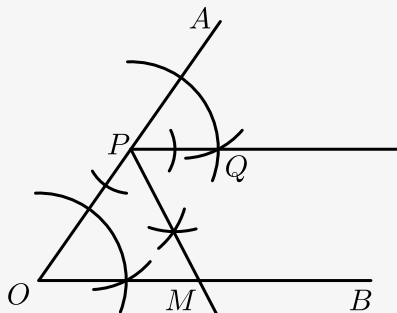
(2) $\angle OMP = 65^\circ$ 。

【解析】(1) ①



$\therefore \angle APQ$ 即为所求。

②



$$(2) \because \angle APQ = \angle O$$

$$\therefore PQ \parallel OB \text{ 且 } \angle O = 50^\circ$$

$$\therefore \angle O + \angle OPQ = 180^\circ, \text{ 即 } \angle OPQ = 130^\circ, \angle OMP = \angle MPQ$$

$$\therefore PM \text{ 平分 } \angle OPQ$$

$$\therefore \angle OMP = \angle MPQ = \frac{1}{2} \angle OPQ = \frac{1}{2} \times 130^\circ = 65^\circ.$$

【标注】【知识点】角的和差的计算与证明-不需要分类讨论

【知识点】作一个角等于已知角

【知识点】作角平分线

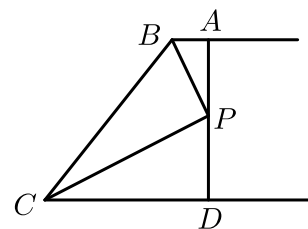
【能力】分析和解决问题能力

二、角平分线的性质与判定

1. 角平分线的性质

练习3

7. 如图, $AB \parallel CD$, BP 和 CP 分别平分 $\angle ABC$ 和 $\angle DCB$, AD 过点 P , 且与 AB 垂直. 若 $AD = 8$, 则点 P 到 BC 的距离是 ().



A. 8

B. 6

C. 4

D. 2

【答案】C

【解析】过点 P 作 $PE \perp BC$ 于 E ,

$$\because AB \parallel CD, PA \perp AB$$

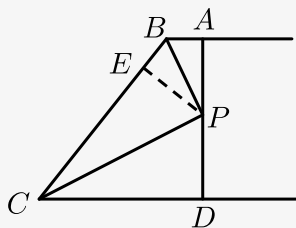
,

$$\therefore PD \perp CD,$$

$$\because BP \text{ 和 } CP \text{ 分别平分}$$

$$\angle ABC \text{ 和 } \angle DCB,$$

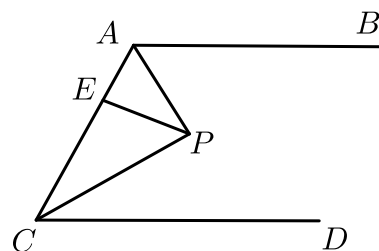
$$\therefore PA = PE, PD = PE,$$



$$\begin{aligned}\therefore PE &= PA = PD, \\ \therefore PA + PD &= AD = 8, \\ \therefore PA &= PD = 4, \\ \therefore PE &= 4.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】角分线性质定理

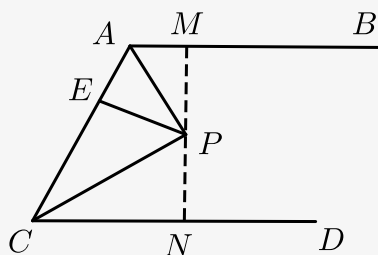
8. 如图所示, 若 $AB \parallel CD$, AP 、 CP 分别平分 $\angle BAC$ 和 $\angle ACD$, $PE \perp AC$ 于 E , 且 $PE = 3\text{cm}$, 则 AB 与 CD 之间的距离 () .



- A. 3cm B. 6cm C. 9cm D. 无法确定

【答案】B

【解析】

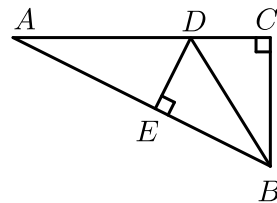


解：过点 P 作 $PM \perp AB$, 并反向延长交 CD 于点 N ,
 $\because AB \parallel CD$, 则 $PN \perp CD$,
 在 $\triangle AEP$ 和 $\triangle AMP$ 中,
 $\because \angle BAP = \angle PAE$, $\angle AEP = \angle AMP$, $AP = AP$,
 $\therefore \triangle AEP \cong \triangle AMP (\text{AAS})$,
 $\therefore PM = PE = 3\text{cm}$,
 在 $\triangle CPE$ 和 $\triangle CPN$ 中,
 $\because \angle ECP = \angle PCN$, $\angle PNC = \angle PEC$, $PC = PC$,
 $\therefore \triangle CPE \cong \triangle CPN (\text{AAS})$,
 $\therefore PN = PE = 3\text{cm}$,
 $\therefore MN = PM + PN = 3 + 3 = 6\text{cm}$,
 $\therefore AB$ 与 CD 之间的距离是 6cm .

故选：B．

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

9. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， E 是 AB 上一点，且 $BE = BC$ ，过 E 作 $DE \perp AB$ 交 AC 于 D ，如果 $AC = 5\text{cm}$ ，则 $AD + DE$ 等于（ ）



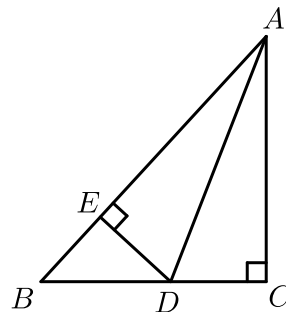
- A. 3cm B. 4cm C. 5cm D. 6cm

【答案】C

【解析】 $\because DE \perp AB$ ，
 $\therefore \angle DEB = 90^\circ = \angle C$ ，
在 $\text{Rt}\triangle BED$ 和 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中
$$\begin{cases} BD = BD \\ BE = BC \end{cases}$$
 $\therefore \text{Rt}\triangle BED \cong \text{Rt}\triangle BCD (\text{HL})$ ，
 $\therefore DE = DC$ ，
 $\therefore AD + DE = AD + CD = AC = 5\text{cm}$ ，
故选C．

【标注】【知识点】HL

10. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， AD 平分 $\angle BAC$ ，过点 D 作 $DE \perp AB$ 于 E ，测得 $BC = 9$ ， $BE = 3$ ，则 $\triangle BDE$ 的周长是（ ）．



- A. 15 B. 12 C. 9 D. 6

【答案】B

【解析】 $\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$$\angle C = 90^\circ, DE \perp AB,$$

$$\therefore DE = DC,$$

$$\text{又} \because BC = 9, BE = 3,$$

$$\therefore \triangle BDE \text{周长} = BE + BD + DE,$$

$$= BE + BD + DC,$$

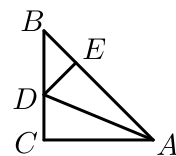
$$= BE + BC,$$

$$= 3 + 9,$$

$$= 12.$$

【标注】【知识点】角分线性质定理

11. 如图, $\angle ACB = \angle AED = 90^\circ$, $AC = BC$, AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D , 若 $AB = 9$, 则 $\triangle DEB$ 的周长为 _____.



【答案】9

【解析】 $\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$$\therefore \angle CAD = \angle EAD,$$

$$\text{在} \triangle ACD \text{和} \triangle AED \text{中} \begin{cases} \angle CAD = \angle EAD \\ \angle DCA = \angle DEA, \\ AD = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle AED (\text{AAS}),$$

$$\therefore AE = AC,$$

$$\therefore BE = AB - AE = AB - AC,$$

$$\text{又} DE \perp AB, DC \perp CD,$$

$$\therefore DE = DC,$$

$$\therefore BD + DE + AE$$

$$= BD + CD + AE$$

$$= BC + AB - AC$$

$$= AB$$

$$= 9,$$

即 $\triangle BDE$ 的周长为9.

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

【知识点】AAS

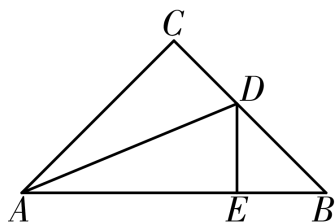
【知识点】角分线性质定理

【思想】数形结合思想

【能力】运算能力

【能力】推理论证能力

12. 如图： $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ， AD 平分 $\angle CAB$ 交 BC 于 D ， $DE \perp AB$ 于 E ，且 $AB = 6\text{cm}$ ，则 $\triangle DEB$ 的周长是()



A. 6cm

B. 4cm

C. 10cm

D. 以上都不对

【答案】A

【解析】解：法一： $\because \angle C = 90^\circ$ ， $\therefore DC \perp AC$ ，
又 AD 平分 $\angle CAB$ 交 BC 于 D ， $DE \perp AB$ ，
 $\therefore CD = ED$ ，
在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 和 $\text{Rt}\triangle AED$ 中，
$$\begin{cases} DC = DE \\ AD = AD \end{cases}$$

 $\therefore \text{Rt}\triangle ACD \cong \text{Rt}\triangle AED(\text{HL})$ ，
 $\therefore AC = AE$ ，又 $AC = BC$ ，
 $\therefore AC = AE = BC$ ，又 $AB = 6\text{cm}$ ，
 $\therefore \triangle DEB$ 的周长
 $= DB + ED + BE = DB + CD + BE = BC + BE = AE + EB = AB = 6\text{cm}$ ．
故选A．

法二： $\because DE \perp AB$ ， $\therefore \angle C = \angle AED = 90^\circ$ ，
 $\because AD$ 平分 $\angle CAB$ ， $\therefore \angle CAD = \angle EAD$ ，
在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle AED$ 中，

$$\begin{cases} \angle C = \angle AED \\ \angle CAD = \angle EAD, \\ AD = AD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle AED (\text{AAS})$,

$\therefore AC = AE, CD = DE$,

又 $AC = BC$,

$\therefore AC = AE = BC$, 又 $AB = 6\text{cm}$,

$\therefore \triangle DEB$ 的周长

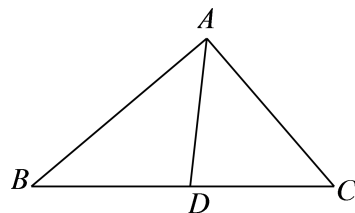
$= DB + ED + BE = DB + CD + BE = BC + BE = AE + EB = AB = 6\text{cm}$,

故选A.

【标注】【知识点】角分线性质定理

练习4

13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是它的角平分线, $AB = 8\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$, 则 $S_{\triangle ABD} : S_{\triangle ACD} = ($
 $)$.



A. 3 : 4

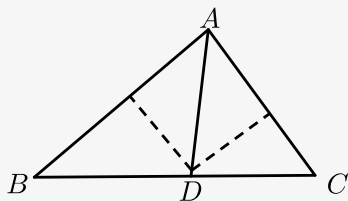
B. 4 : 3

C. 16 : 9

D. 9 : 16

【答案】B

【解析】作 $DE \perp AB$ 于 E , $DF \perp AC$ 于 F ,



$\therefore AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线,

$\therefore DE = DF$

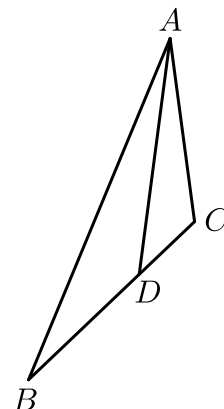
$\therefore S_{\triangle ABD} : S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AB \cdot DE : \frac{1}{2} AC \cdot DF = AB : AC = 8 : 6 = 4 : 3$.

故选B.

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】角分线性质定理

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 上，若 $\angle BAD = \angle CAD$ ， $AB = 6$ ， $AC = 3$ ， $S_{\triangle ABD} = 3$ ，则 $S_{\triangle ACD} = (\quad)$.



A. 3

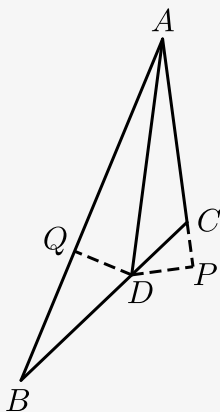
B. 6

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{9}{2}$

【答案】C

【解析】过 D 作 $DP \perp AC$ 交 AC 的延长线于 P ， $DQ \perp AB$ 于 Q ，



$$\because \angle BAD = \angle CAD,$$

$$\therefore DP = DQ,$$

$$\because S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DQ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot DQ$$

$$= 3,$$

$$\therefore DQ = 1,$$

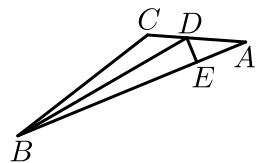
$$\therefore DP = 1,$$

$$\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot DP$$

$$= \frac{3}{2}.$$

【标注】【知识点】角分线性质定理

15. 如图， BD 是 $\angle ABC$ 平分线， $DE \perp AB$ 于 E ， $AB = 36\text{cm}$ ， $BC = 24\text{cm}$ ， $S_{\triangle ABC} = 144\text{cm}^2$ ，则 DE 的长是（ ）。



- A. 4.8cm B. 4.5cm C. 4cm D. 2.4cm

【答案】A

【解析】如图，过点 D 作 $DF \perp BC$ 交 BC 的延长线于 F ，

$\because BD$ 是 $\angle ABC$ 平分线，

$DE \perp AB$ 于 E ，

$\therefore DE = DF$ ，

$\therefore$

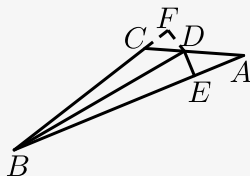
$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}$ ，

$AB = 36\text{cm}$ ， $BC = 24\text{cm}$ ，

$\therefore \frac{1}{2} \times 36 \times DE + \frac{1}{2} \times 24 \times DF = 144$ ，

即 $18DE + 12DE = 144$ ，

解得 $DE = 4.8\text{cm}$ 。

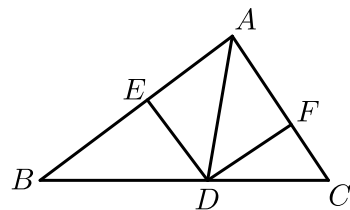


【标注】【能力】运算能力

【知识点】角分线性质定理

【方法】等面积法

16. 如图， AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D ， $DE \perp AB$ 于点 E ， $DF \perp AC$ 于点 F 。若 $S_{\triangle ABC} = 12$ ， $DF = 2$ ， $AC = 3$ ，则 AB 的长是（ ）。



- A. 2 B. 4 C. 7 D. 9

【答案】D

【解析】 $\because AD$ 平分 $\angle BAC$, $DE \perp AB$, $DF \perp AC$,

$$\therefore DE = DF = 2,$$

$$\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD},$$

$$\therefore 12 = \frac{1}{2} \times AB \times DE + \frac{1}{2} \times AC \times DF,$$

$$\therefore 24 = AB \times 2 + 3 \times 2,$$

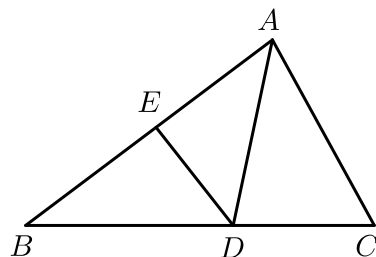
$$\therefore AB = 9.$$

故选D.

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】角分线性质定理

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是角平分线, $DE \perp AB$ 于点 E , $\triangle ABC$ 的面积为15, $AB = 6$, $DE = 3$, 则 AC 的长是().



A. 8

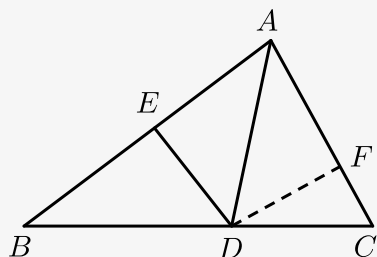
B. 6

C. 5

D. 4

【答案】D

【解析】如图, 过点 D 作 $DF \perp AC$ 于 F .



$\because AD$ 是角平分线, $DE \perp AB$,

$$\therefore DE = DF,$$

$\because \triangle ABC$ 的面积为15,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} = 15,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} AB \cdot DE + \frac{1}{2} AC \cdot DF = 15.$$

$$\therefore AB = 6, DE = 3,$$

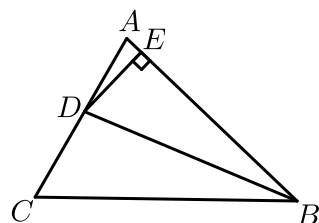
$$\therefore AC = 4,$$

故答案为D.

【标注】【知识点】角分线性质定理

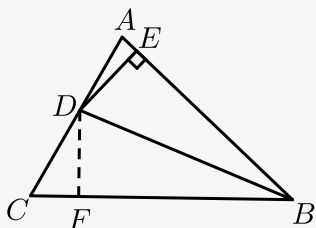
练习5

18. 如图, BD 是 $\angle ABC$ 的角平分线, $DE \perp AB$ 于 E , $\triangle ABC$ 的面积是 50cm^2 , $AB = 11\text{cm}$, $BC = 14\text{cm}$, 则 $DE =$ _____ cm .



【答案】4

【解析】过 D 作 $DF \perp BC$ 于 F ,



$\therefore BD$ 是 $\angle ABC$ 的角平分线, $DE \perp AB$,

$\therefore DF = DE$,

$\therefore \triangle ABC$ 的面积是50, $AB = 11$, $BC = 14$,

$$\therefore \frac{1}{2} \times BC \times DF + \frac{1}{2} \times AB \times DE = 50,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 14 \times DE + \frac{1}{2} \times 11 \times DE = 50,$$

$$\therefore DE = 4$$

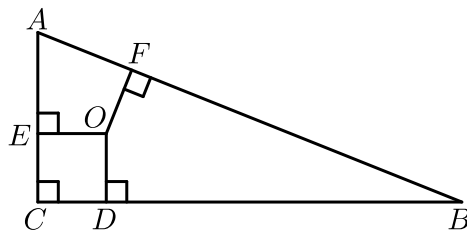
故答案为: 4.

【标注】【知识点】角分线性质定理

【思想】数形结合思想

【能力】运算能力

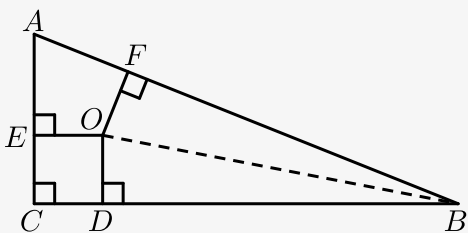
19. 已知：如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，点 O 为 $\triangle ABC$ 的三条角平分线的交点， $OD \perp BC$ ， $OE \perp AC$ ， $OF \perp AB$ 点 D 、 E 、 F 分别是垂足，且 $AB = 10\text{cm}$ ， $BC = 8\text{cm}$ ， $CA = 6\text{cm}$ ，则点 O 到三边 AB 、 AC 和 BC 的距离分别等于（ ）。



- A. 2cm , 2cm , 2cm B. 3cm , 3cm , 3cm C. 4cm , 4cm , 4cm D. 2cm , 3cm , 5cm

【答案】A

【解析】



连接 OB ，

$\because$ 点 O 为 $\triangle ABC$ 的三条角平分线的交点， $OD \perp BC$ ， $OE \perp AC$ ， $OF \perp AB$ ， $OF \perp AB$ ，点 D 、 E 、 F 分别是垂足，

$\therefore OE = OF = OD$ ，

又 $\because OB$ 是公共边，

$\therefore \text{Rt}\triangle BOF \cong \text{Rt}\triangle BOD$ (HL)，

$\therefore BD = BF$ ，

同理， $AE = AF$ ， $CE = CD$ ，

$\because \angle C = 90^\circ$ ， $OD \perp BC$ ， $OE \perp AC$ ， $OF \perp AB$ ， $OD = OE$ ，

$\therefore OECD$ 是正方形，

设 $OE = OF = OD = x$ ，则 $CE = CD = x$ ， $BD = BF = 8 - x$ ，

$AF = AE = 6 - x$ ，

$\therefore BF + FA = AB = 10$ ，即 $6 - x + 8 - x = 10$ ，

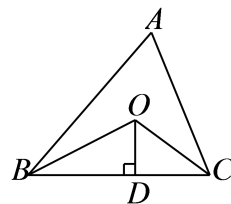
解得 $x = 2$ 。

则 $OE = OF = OD = 2$ 。

故选A。

【标注】【知识点】角分线性质定理

20. 如图，已知 $\triangle ABC$ 的周长是10，点 O 为 $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的角平分线的交点，且 $OD \perp BC$ 于 D ，若 $OD = 2$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积是（ ）。



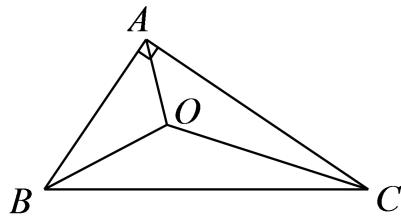
- A. 20 B. 12 C. 10 D. 8

【答案】C

【解析】过点 O 作 AC ， AB 的垂直垂足是 M 、 N ，
 $\because OC$ 平分 $\angle ACB$ ， OB 平分 $\angle ABC$ ，
 $\therefore OD = OM = ON$ ，
 又 $\because OD = 2$ ，
 $\therefore OM = ON = 2$ ，
 $\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABO} + S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC}$ ，
 $\frac{1}{2}AB \cdot ON + \frac{1}{2}AC \cdot OM + \frac{1}{2}BC \cdot OD$ ，
 $= \frac{1}{2} \times 2(AB + AC + BC)$ ，
 又 $\because \triangle ABC$ 的周长是10，
 $\therefore S_{\triangle ABC} = 10$ 。

【标注】【知识点】角分线性质定理

21. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = 9$ ， $AC = 12$ ， $BC = 15$ ，三条角平分线交于一点 O ，则 $\triangle AOB$ 的面积为（ ）。



- A. 18 B. 12.5 C. 22.5 D. 13.5

【答案】D

【解析】过 O 作 $OE \perp AB$, $OF \perp AC$, $OG \perp BC$,

$\therefore OB$, OC , OA 分别为

$\angle ABC$, $\angle ACB$ 与 $\angle BAC$

的角平分线,

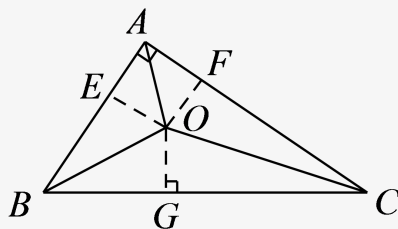
$\therefore OE = OF = OG$.

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB = 9$

, $AC = 12$, $BC = 15$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 9 \times 12 \times \frac{1}{2} = 54,$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle ABC} \times \frac{9}{15 + 12 + 9} = 54 \times \frac{9}{36} = 13.5.$$

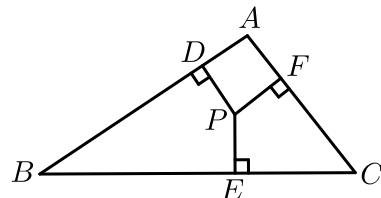


【标注】【知识点】角分线性质定理

【能力】推理论证能力

练习6

22. 如图, 点 P 是 $\triangle ABC$ 内一点, $PD \perp AB$, $PE \perp BC$, $PF \perp AC$, 且 $PD = PE = PF$, 则点 P 是 ().



A. $\triangle ABC$ 三边垂直平分线的交点

B. $\triangle ABC$ 三条角平分线的交点

C. $\triangle ABC$ 三条高所在直线的交点

D. $\triangle ABC$ 三条中线的交点

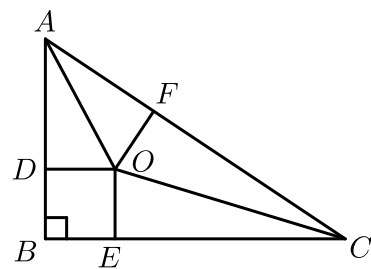
【答案】B

【解析】 $\because$ 点 P 是 $\triangle ABC$ 内一点, $PD \perp AB$, $PE \perp BC$, $PF \perp AC$, 且 $PD = PE = PF$,

$\therefore$ 点 P 是 $\triangle ABC$ 三条角平分线的交点.

【标注】【知识点】角平分线判定定理

23. 如图, 直角三角形 ABC 内, 若点 O 到三角形三边的距离相等, $\angle AOC = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$.



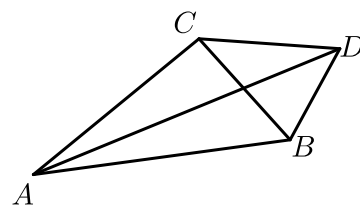
【答案】 135

【解析】 $\because OD = OE$,
 $\therefore AO$ 平分 $\angle BAC$,
 $\because OE = OF$,
 $\therefore CO$ 平分 $\angle ACB$,
 $\therefore \angle OAC + \angle OCA$,
 $= \frac{1}{2} \angle BAC + \frac{1}{2} \angle ACB$,
 $= \frac{1}{2} (\angle BAC + \angle ACB) = \frac{1}{2} \times 90^\circ$,
 $= 45^\circ$,
 $\therefore \angle AOC = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

【标注】 【知识点】 角平分线判定定理

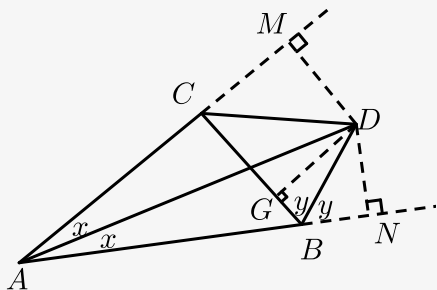
练习7

24. 如图，四边形 $ABDC$ 中，对角线 AD 平分 $\angle BAC$, $\angle ACD = 136^\circ$, $\angle BCD = 44^\circ$, 则 $\angle ADB$ 的度数为 _____ .



【答案】 46°

【解析】 过 D 作 $DM \perp AC$, $DN \perp AB$,
 $DG \perp AB$, 垂足为 M , N , G ,



$$\angle DCM + \angle ACD = 180^\circ ,$$

$$\angle ACD = 136^\circ ,$$

$$\therefore \angle DCM = 44^\circ ,$$

$$\therefore \angle BCD = 44^\circ ,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle DCM ,$$

$$\because DM \perp AC , DG \perp BC ,$$

$$\therefore DM = DG ,$$

$$\therefore AD \text{ 平分 } \angle BAC ,$$

$$DM \perp AC , DN \perp AB ,$$

$$\therefore DM = DN ,$$

$$\therefore DG = DN ,$$

$$\because DG \perp BC , DN \perp AB ,$$

$$\therefore BD \text{ 平分 } \angle CBN ,$$

$$\text{设 } \angle CAB = 2x , \angle CBN = 2y ,$$

$$\text{在 } \triangle CAB \text{ 中} , \angle ACB = 92^\circ ,$$

$$2y = 2x + \angle ACB ,$$

$$2y = 2x + 92^\circ ,$$

$$\therefore y - x = 46^\circ ,$$

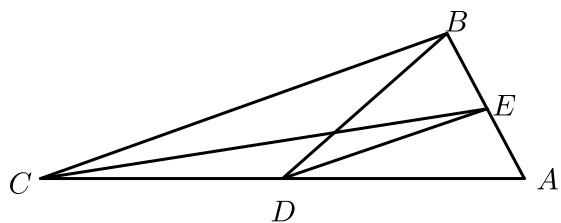
$$\therefore \angle ADB = \angle DBN - \angle DAB$$

$$= y - x$$

$$= 46^\circ .$$

【标注】【知识点】角分线性质定理

25. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 100^\circ$, $\angle ACB = 20^\circ$, CE 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于 E , D 在 AC 上, 且 $\angle CBD = 20^\circ$, 则 $\angle CED$ 的度数是 _____ .



【答案】 10°

【解析】 $\because \angle ABC = 100^\circ, \angle CBD = 20^\circ,$

$$\therefore \angle DBA = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle PBA = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle DBA = \angle PBA,$$

$\therefore BA$ 是 $\triangle CBD$ 的外角平分线,

如图, 作 $EF \perp AC$ 于 $F, EG \perp BD$ 于 $G, EH \perp CB$ 于 $H,$

$\because CE$ 平分 $\angle ACB, EF \perp AC, EH \perp CB,$

$$\therefore EF = EH,$$

同理,

$$EG = EH$$

$$\therefore EF = EG$$

又 $\because EF \perp AC, EG \perp BD,$

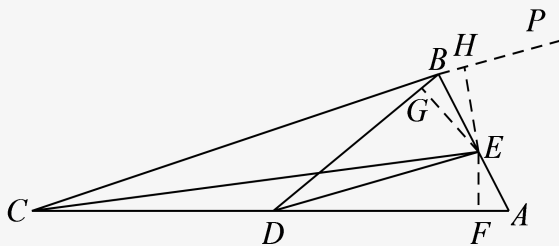
$\therefore DE$ 平分 $\angle BDA,$

$\because \angle ACB = 20^\circ, \angle CBD = 20^\circ, CE$ 平分 $\angle ACB,$

$$\therefore \angle ADB = 40^\circ, \angle DCE = 10^\circ,$$

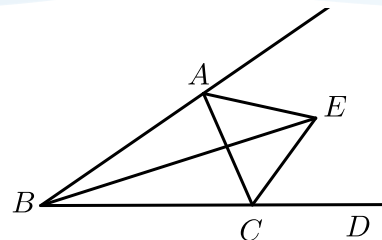
$$\therefore \angle ADE = \frac{1}{2} \angle ADB = 20^\circ,$$

$$\therefore \angle CED = \angle ADE - \angle DCE = 10^\circ.$$



【标注】 【知识点】 垂直构对称

26. 如图, $\angle ACD$ 是 $\triangle ABC$ 的外角, $\angle BAC = 80^\circ$, $\angle ABC$ 和 $\angle ACD$ 的平分线相交于点 E , 连接 AE , 则 $\angle CAE$ 的度数是 () .



A. 35°

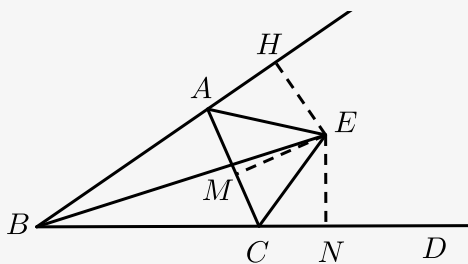
B. 40°

C. 50°

D. 55°

【答案】 C

【解析】 过E作 $EN \perp BD$ 于N, $EM \perp AC$ 于M, $EH \perp BA$ 交BA延长线于H,



$\because BE$ 平分 $\angle ABC$, CE 平分 $\angle ACD$,

$\therefore EH = EN$, $EM = EN$,

$\therefore EH = EM$,

$\because EH \perp BA$, $EM \perp AC$,

$\therefore AE$ 平分 $\angle CAH$,

$\therefore \angle CAE = \frac{1}{2} \angle CAH$,

$\because \angle BAC = 80^\circ$,

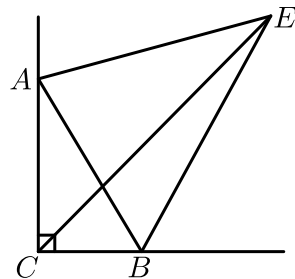
$\therefore \angle CAH = 180^\circ - \angle BAC = 100^\circ$,

$\therefore \angle CAE = 50^\circ$.

故选C.

【标注】【知识点】角平分线判定定理

27. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle ACB$ 的平分线与 $\angle ABC$ 的外角的平分线交于E点, 则 $\angle AEB$ 的度数是 _____.



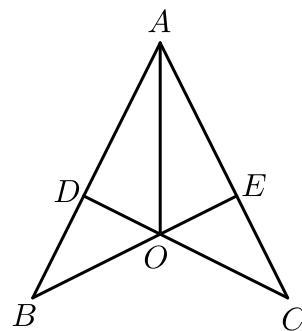
【答案】 45°

【解析】 $\because E$ 在 $\angle C$ 的平分线上，
 $\therefore E$ 点到 CB 的距离等于 E 到 AC 的距离，
 $\because E$ 在 $\angle B$ 的外角的平分线上，
 $\therefore E$ 点到 CB 的距离等于 E 到 AB 的距离，
 $\therefore E$ 点到 AC 的距离等于 E 到 AB 的距离，
 $\therefore AE$ 是 $\angle BAC$ 的外角的平分线，
 $\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle BAC = 30^\circ$ ，
 $\therefore \angle ABC = 60^\circ$ ， $\angle BAE = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$ ，
 $\therefore EB$ 是 $\angle ABC$ 的外角的平分线，
 $\therefore \angle ABE = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle AEB = 180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ$ 。

【标注】 【知识点】 角分线性质定理

练习8

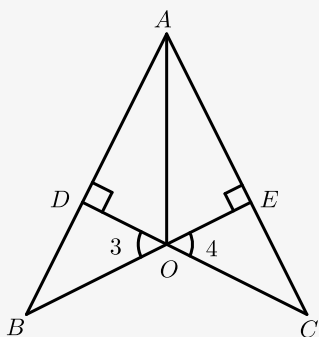
28. 如图， $CD \perp AB$ 于点 D ， $BE \perp AC$ 于点 E ， BE ， CD 交于点 O ，且 AO 平分 $\angle BAC$ 。求证：
 $OB = OC$ 。



【答案】 证明见解析。

【解析】 $\because AO$ 平分 $\angle BAC$ ， $OD \perp AB$ ， $OE \perp AC$ ，
 $\therefore OD = OE$ ，
在 $\triangle ODB$ 与 $\triangle OEC$ 中
$$\begin{cases} \angle 3 = \angle 4 \text{ (对顶角相等)} \\ OD = OE \text{ (已证)} \\ \angle ODB = \angle OEC \text{ (已知)} \end{cases}$$
 $\therefore \triangle ODB \cong \triangle OEC \text{ (ASA)}$

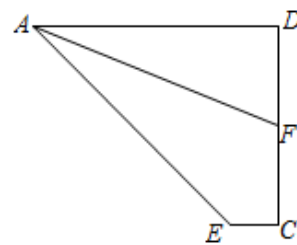
$$\therefore OB = OC .$$



【标注】【知识点】ASA

29. 如图， F 为四边形 $AECD$ 的边 CD 的中点， $\angle FAD = \angle FAE$ ， $\angle C = \angle D = 90^\circ$ ，求证：

$$AE = AD + CE .$$



【答案】证明见解析.

【解析】过 F 作 $FH \perp AE$ 于点 H ，连结 FE ，

$$\because \angle FAD = \angle FAE ,$$

$$\therefore AF \text{ 平分 } \angle DAE ,$$

$$\because \angle D = 90^\circ , \angle FHA = 90^\circ ,$$

$$\therefore FD = FH ,$$

在 $\text{Rt}\triangle DFA$ 和 $\text{Rt}\triangle HFA$ 中，

$$\begin{cases} FD = FH \\ AF = AF \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle DFA \cong \text{Rt}\triangle HFA (\text{HL}) ,$$

$$\therefore AH = AD ,$$

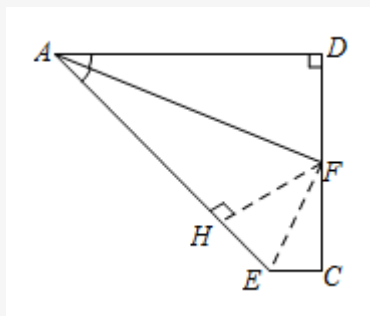
$$\because F \text{ 为 } CD \text{ 中点 } ,$$

$$\therefore DF = FC ,$$

$$\because FH = DF ,$$

$$\therefore FC = FH ,$$

在 $\text{Rt}\triangle FHE$ 和 $\text{Rt}\triangle FCE$ 中，



$$\begin{cases} FC = FH \\ FE = FE' \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle FHE \cong \text{Rt}\triangle FCE (\text{HL}),$$

$$\therefore HE = EC,$$

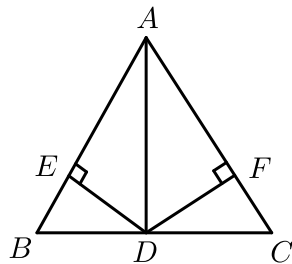
$$\therefore AE = AH + HE,$$

$$\therefore AE = AD + EC.$$

【标注】【知识点】角分线有关的辅助线

练习9

30. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 是 BC 的中点， $DE \perp AB$ ， $DF \perp AC$ ，垂足分别是 E ， F ， $BE = CF$ 。
求证： AD 平分 $\angle BAC$ 。



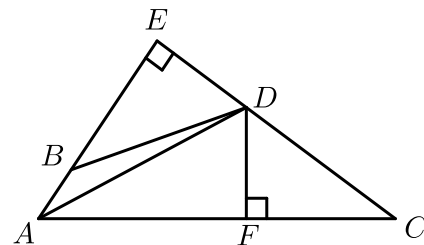
【答案】证明见解析。

【解析】 $\because D$ 是 BC 的中点，
 $\therefore BD = CD$ 。
 又 $\because DE \perp AB$ ， $DF \perp AC$ ，
 $\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 与 $\text{Rt}\triangle CDF$ 中，

$$\begin{cases} BD = CD \\ BE = CF \end{cases}$$
 $\therefore \text{Rt}\triangle BDE \cong \text{Rt}\triangle CDF (\text{HL}),$
 $\therefore DE = DF$ 。
 又 $\because DE \perp AB$ ， $DF \perp AC$ ，
 $\therefore$ 点 D 在 $\angle BAC$ 的角平分线上，
 $\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$ 。

【标注】【知识点】角平分线判定定理

31. 如图， $BE = CF$ ， $DE \perp AB$ 的延长线于点 E ， $DF \perp AC$ 于点 F ，且 $DB = DC$ ，
求证： AD 是 $\angle BAC$ 的平分线。



【答案】 证明见解析 .

【解析】 $\because DE \perp AB$ 的延长线于点 E , $DF \perp AC$ 于点 F ,

$$\therefore \angle BED = \angle CFD ,$$

$\therefore \triangle BDE$ 与 $\triangle CDF$ 是直角三角形 ,

在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 与 $\text{Rt}\triangle CDF$ 中 ,

$$\begin{cases} BE = CF \\ BD = CD \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BDE \cong \text{Rt}\triangle CDF ,$$

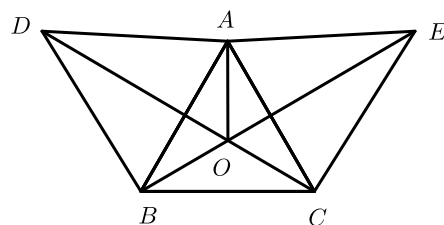
$$\therefore DE = DF ,$$

$\therefore AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线 .

【标注】 【知识点】角平分线判定定理

【能力】推理论证能力

32. 以 $\triangle ABC$ 的 AB 、 AC 为边向三角形外作等边 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ACE$, 连接 CD 、 BE 相交于点 O . 求证 : OA 平分 $\angle DOE$.



【答案】 证明见解析 .

【解析】 因为 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ACE$ 是等边三角形 ,

$$\text{所以 } AB = AD , AE = AC , \angle CAE = \angle BAD = 60^\circ ,$$

$$\text{则 } \angle BAE = \angle DAC ,$$

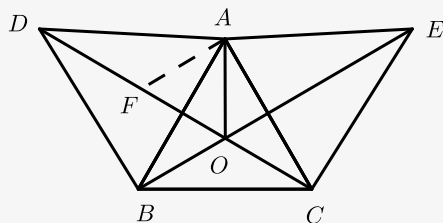
$$\text{所以 } \triangle BAE \cong \triangle DAC ,$$

$$\text{则有 } \angle ABE = \angle ADC , \angle AEB = \angle ACD , BE = DC .$$

在 DC 上截取 $DF = BO$, 连接 AF , 容易证得 $\triangle ADF \cong \triangle ABO$, $\triangle ACF \cong \triangle AEO$.

进而由 $AF = AO$ 得 $\angle AFO = \angle AOF$;

由 $\angle AOE = \angle AFO$ 可得 $\angle AOF = \angle AOE$, 即 OA 平分 $\angle DOE$.



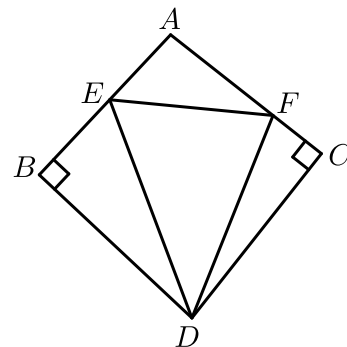
【标注】【知识点】全等三角形的性质

【知识点】角平分线判定定理

【知识点】SAS

【能力】推理论证能力

33. 如图, $BD = CD$, $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$, 点 E 、 F 分别在 AB 、 AC 上, 若 ED 平分 $\angle BEF$.



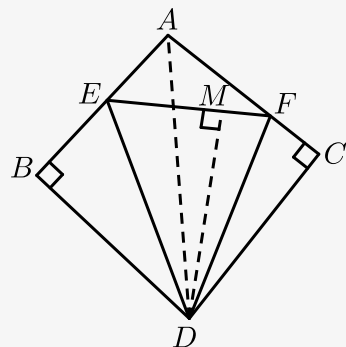
(1) 求证: FD 平分 $\angle EFC$.

(2) 若 $EF = 4$, $AF = 6$, $AE = 5$, 求 BE 和 CF 的长 .

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) $BE = 2.5$, $CF = 1.5$.

【解析】(1) 过 D 作 $DM \perp EF$,



$\because ED$ 平分 $\angle BEF$,

$\therefore BD = DM$,

$$\therefore BD = CD ,$$

$$\therefore DC = DM ,$$

$$\therefore FD \text{ 平分 } \angle EFC .$$

(2) 在 $\text{Rt}\triangle BED$ 和 $\text{Rt}\triangle MED$ 中 ,

$$\begin{cases} BD = MD \\ ED = ED \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BED \cong \text{Rt}\triangle MED (\text{HL}) .$$

$$\therefore BE = ME .$$

$$\text{同理} : CF = MF .$$

$$\therefore EF = BE + CF .$$

$$\text{设 } BE = x , CF = y ,$$

$$\therefore x + y = 4 , \text{ ①}$$

连接 AD ,

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 与 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中 ,

$$\begin{cases} AD = AD \\ BD = CD \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABD \cong \text{Rt}\triangle ACD (\text{HL}) ,$$

$$\therefore AB = AC ,$$

$$\therefore AE + BE = AF + CF ,$$

$$\therefore 5 + x = 6 + y , \text{ ②}$$

$$\text{由 ①②} , \text{ 解得 } x = 2.5 , y = 1.5 ,$$

$$\therefore BE = 2.5 , CF = 1.5 .$$

【标注】【知识点】HL

【知识点】角平分线判定定理

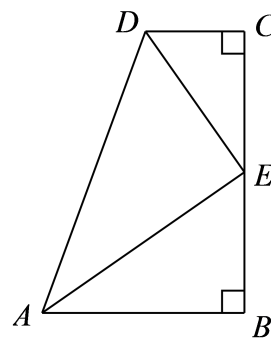
【知识点】角分线性质定理

【知识点】全等三角形的对应边与角

【知识点】代入消元法解二元一次方程组

【能力】推理论证能力

34. 如图 , 在四边形 $ABCD$ 中 , $\angle B = \angle C = 90^\circ$, AE 平分 $\angle DAB$, E 是 BC 的中点 . 求证 :



- (1) DE 平分 $\angle CDA$.
 (2) $AE \perp DE$.
 (3) 若 $AD = 10$, $BE = 4$, 求梯形 $ABCD$ 的面积 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析 .

(3) 40 .

【解析】 (1) 过点 E 作 $EF \perp AD$ 于 F , 如图所示 .

$\because AE$ 平分 $\angle DAB$, $\angle B = 90^\circ$, $EF \perp AD$

,

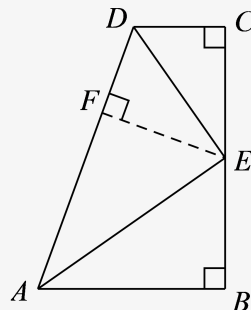
$\therefore BE = EF$. $\because E$ 是 BC 的中点 ,

$\therefore BE = CE$, $\therefore EF = CE$.

$\because \angle C = 90^\circ$, $EF \perp AD$, $EF = CE$,

$\therefore$ 点 E 在 $\angle CDA$ 的平分线上 ,

即 DE 平分 $\angle CDA$.



(2) $\because$ 在四边形 $ABCD$ 中 , $\angle B = \angle C = 90^\circ$,

$\therefore AB \parallel CD$, $\therefore \angle CDA + \angle DAB = 180^\circ$,

$\because AE$ 平分 $\angle DAB$, DE 平分 $\angle CDA$,

$\therefore \angle ADE + \angle DAE = \frac{1}{2} \angle CDA + \frac{1}{2} \angle DAB = 90^\circ$,

$\therefore \angle DEA = 180^\circ - (\angle ADE + \angle DAE) = 90^\circ$,

$\therefore AE \perp DE$.

(3) $\because AE$ 平分 $\angle DAB$, $\therefore \angle FAE = \angle BAE$,

$\because \angle B = \angle AFE = 90^\circ$, $AE = AE$,

$\therefore \triangle AFE \cong \triangle ABE$ (AAS) ,

$\therefore AF = AB$,

同理 , $\triangle DFE \cong \triangle DCE$ (AAS) ,

$$\therefore DF = DC ,$$

$$\therefore AD = 10 ,$$

$$\therefore AB + DC = 10 ,$$

$$\therefore E \text{ 是 } BC \text{ 的中点 , } BE = 4 , \therefore BC = 8 ,$$

$$\therefore \text{梯形 } ABCD \text{ 的面积} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot BC = \frac{1}{2} \times 10 \times 8 = 40 .$$

【标注】【知识点】直角梯形